

# 对 Willhite 经验公式的改进

邓森<sup>1,2</sup>, 李斌会<sup>1,2</sup>, 赵宇<sup>1,2</sup>

(1. 大庆油田有限责任公司勘探开发研究院 黑龙江大庆 163712; 2. 黑龙江省油层物理与渗流力学重点实验室 黑龙江大庆 163712)

**摘要:**传统的油水相对渗透率曲线经验公式较多,最经典的为 Willhite 公式。Willhite 公式的油相指数和水相指数是常数,对于油水相对渗透率突变较大的情况拟合误差较大,有必要对其进行改进。经过对传统经验公式的研究,并对大庆油田 93 条油水相对渗透率曲线进行分析对比,提出了拟合精度更高的经验公式。改进的经验公式把油相指数和水相指数看作含水饱和度的函数,利用最小二乘法原理得到相应的回归系数,进而得到新的油水相对渗透率经验公式。新公式更能反映油水相渗规律的变化,可应用于油田生产实践。

**关键词:**油水相对渗透率;含水饱和度;Willhite 公式

中图分类号:TE341 文献标志码:A

## Improved Willhite empirical formula

Deng Sen<sup>1,2</sup>, LI Binhui<sup>1,2</sup>, ZHAO Yu<sup>1,2</sup>

(1. Exploration and Development Research Institute of Daqing Oilfield Co., Daqing 163712, China;

2. Heilongjiang Provincial Key Laboratory of Reservoir Physics & Fluid Mechanics in Porous Medium, Daqing 163712, China)

**Abstract:** There are many empirical formulas for curves of oil – water relative permeability. However, the most classic one is Willhite formula. In the Willhite formula, the indexes of oil and water phases are constant. There is a larger fitting error if a sudden change in the oil – water relative permeability is bigger. So, it is necessary to improve the Willhite formula. After studying the traditional empirical formula and comparatively analyzing 93 curves of oil – water relative permeability taken from Daqing Oilfield, it was proposed an empirical formula with a higher fitting accuracy. In the improved empirical formula, the oil phase index and the water phase index are considered as the function of water saturation. According to the principle of least squares, corresponding regression coefficients are obtained. And then it is obtained a new empirical formula of oil – water relative permeability. The improved empirical formula can better reflect the change of oil – water phase permeability law, and can be applied to production practice of oilfield.

**Key words:** oil – water relative permeability; water saturation; Willhite formula

油水相对渗透率曲线在油气田开发过程中有着重要的应用,国内外学者对此展开的研究也很多<sup>[1–10]</sup>。1946—1987 年,国外的 Jones、Corey、Pris- on、Wyllite、Brooks – Corey、Chierici 和 Willhite 先后对油水相对渗透率曲线经验公式进行了研究,Jones 把水相指数看作一个固定的常数 3;Corey 把水相指- 数看作一个不确定的常数  $m$ ;Wyllite 认为分选性好的非胶结砂岩的水相指数为 3,分选性差的非胶结砂岩的水相指数为 3.5,胶结砂岩、鲕状灰岩或孔穴灰岩的水相指数为 4;Willhite 则把水相指数看作一个不确定的常数  $m$ ,并对水相渗透率端点值进行了修正,Corey 和 Willhite 给出的油相相对渗透的表达

式相同。国内研究相对渗透率曲线经验公式的有陈元千、李克文和张继成等,陈元千把水相指数和油相指数看作一个固定的常数 3,同时对水相相对渗透率端点进行了修正,但未对油相相对渗透率端点进行修正;李克文公式与 Willhite 公式有些相似,只是水相相对渗透率表达式多了一个含水饱和度的一次项,油相相对渗透率表达式多了一个含油饱和度的

收稿日期:2019-06-05;改回日期:2019-07-15。

第一作者简介:邓森(1988—),现从事油藏工程、油藏数值模拟和油层物理方面研究。E-mail:342025761@qq.com。

基金项目:国家科技重大专项“精细注采结构优化调整技术”(2016ZX05010002-001)。

一次项,并且为了避免求导出现奇异点引入了常数;张继成则得到了以 10 为底的指数经验公式。

在众多油水相对渗透率经验公式中,应用最广的为 Willhite 经验公式,但 Willhite 经验公式在应用中也会出现一定的局限性,有必要对其进行改进。

## 1 改进 Willhite 公式的必要性

Willhite 经验公式表达式为:

$$K_{ro} = K_{ro}(S_{wc})(1 - S_{wd})^n \quad (1)$$

$$K_{rw} = K_{rw}(S_{or})S_{wd}^m \quad (2)$$

$$S_{wd} = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{or} - S_{wc}} \quad (3)$$

式中: $K_{rw}$  为水相相对渗透率,f; $K_{ro}$  为油相相对渗透率,f; $K_{rw}(S_{or})$  为残余油下水相相对渗透率,f; $K_{ro}(S_{wc})$  为束缚水下油相相对渗透率,f; $S_{wd}$  为归一化含水饱和度,f; $S_{or}$  为残余油饱和度,f; $S_{wc}$  为束缚水饱和度,f; $S_w$  为任意时刻含水饱和度,f; $n$  为油相指数; $m$  为水相指数。

王国先等根据相对渗透率曲线特征参数和形态将其分为 5 种类型<sup>[14]</sup>,其中水相上凹型、水相下凹型和水相直线型是最常见的三种形态。对大庆油田 93 条油水相对渗透率曲线形态进行分析,发现 61.29% 为水相上凹型,23.66% 为水相下凹型,15.05% 为水相直线型,采用 Willhite 经验公式对相对渗透率曲线进行拟合,只有 77.55% 拟合较好。93 条油水相对渗透率曲线的油相指数平均值为 2.476,最大值和最小值分别为 3.4 和 1.6;水相指数的平均值为 2.739,最大值和最小值分别为 4 和 1.4,平均水相指数比油相指数稍大。

Willhite 经验公式拟合不上主要有两种:①油相相对渗透率在含水饱和度较低时快速递减,此时含水率上升比较快,表现为油相相对渗透率曲线较为弯曲,此种情况往往在靠近束缚水端点部分拟合不上;②水相相对渗透率在含水饱和度较高时快速递增,此时已经处于特高含水时期,含水率上升比较慢,表现为水相相对渗透率曲线较为弯曲(见图 1)。

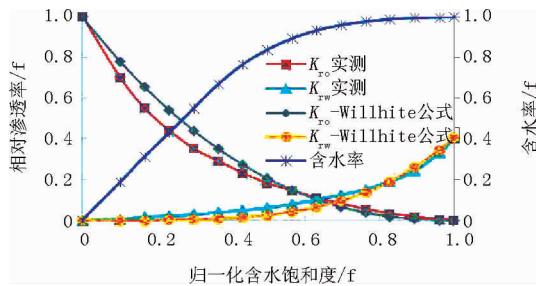


图 1 Willhite 经验公式拟合曲线

进一步对拟合不好的原因进行分析,将式(1)和式(2)分别写成

$$\ln \frac{K_{ro}}{K_{ro}(S_{wc})} = n \ln(1 - S_{wd}) \quad (4)$$

$$\ln \frac{K_{rw}}{K_{rw}(S_{wc})} = m S_{wd} \quad (5)$$

令  $y_1 = \ln \frac{K_{ro}}{K_{ro}(S_{wc})}$ ,  $x_1 = \ln(1 - S_{wd})$ ,  $y_2 = \ln \frac{K_{rw}}{K_{rw}(S_{wc})}$ ,  $x_2 = \ln S_{wd}$ , 则有  $y_1 = nx_1$ ,  $y_2 = mx_2$ 。

通过 Willhite 经验公式回归出的函数关系是通过原点的一条直线,实际上的实验数据点回归出来的直线并没有通过原点,而且实际的数据点会偏离直线。油相相对渗透率数据点在含水饱和度比较低的时候数据点偏离直线稍微向上翘,水相相对渗透率数据点在含水饱和度比较高的时候数据点偏离直线稍微向上翘(见图 2),因此有必要对油相指数和水相指数进行改进。

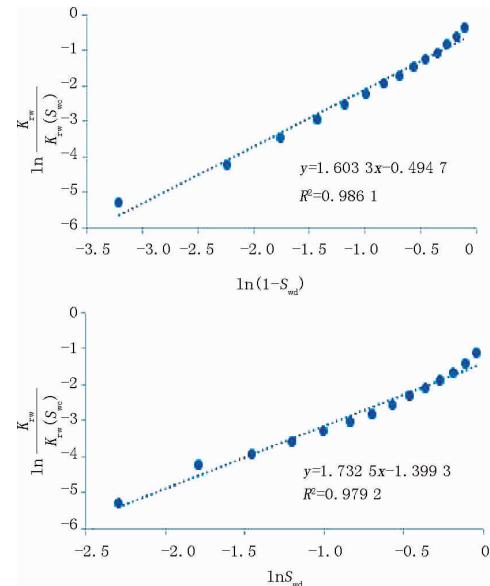


图 2 Willhite 公式线性回归图

## 2 对 Willhite 公式的改进

经过对 93 条油水相对渗透率曲线的反复拟合,提出了拟合精度更高的 Willhite 改进公式:

$$K_{ro} = K_{ro}(S_{wc})(1 - S_{wd})^{aS_{wd} + b\exp(-S_{wd})} \quad (6)$$

$$K_{rw} = K_{rw}(S_{or})S_{wd}^{cS_{wd} + d\exp(-S_{wd})} \quad (7)$$

式中  $a, b, c, d$  均为回归系数,可用二元线性回归法获取,不考虑端点值,将式(6)和(7)写成

$$\ln \frac{K_{ro}}{K_{ro}(S_{wc})} / \ln(1 - S_{wd}) = aS_{wd} + b\exp(-S_{wd}) \quad (8)$$

$$\ln \frac{K_{rw}}{K_{rw}(S_{wc})} / \ln S_{wd} = c S_{wd} + d \exp(-S_{wd}) \quad (9)$$

$$\text{令 } y_1 = \ln \frac{K_{ro}}{K_{ro}(S_{wc})} / \ln(1 - S_{wd}), y_2 =$$

$$\ln \frac{K_{rw}}{K_{rw}(S_{wc})} / \ln S_{wd}, x_1 = S_{wd}, x_2 = \exp(-S_{wd})$$

$$\text{则有 } y_1 = ax_1 + bx_2 \quad (10)$$

$$y_2 = cx_1 + dx_2 \quad (11)$$

根据最小二乘法有

$$\sum x_1 y_1 = a \sum x_1^2 + b \sum x_1 x_2 \quad (12)$$

$$\sum x_2 y_1 = a \sum x_1 x_2 + b \sum x_2^2 \quad (13)$$

$$\sum x_1 y_2 = c \sum x_1^2 + d \sum x_1 x_2 \quad (14)$$

$$\sum x_2 y_2 = c \sum x_1 x_2 + d \sum x_2^2 \quad (15)$$

由此可得

$$a = \frac{\sum x_1 y_1}{\sum x_1^2} - \frac{\sum x_2 y_1 \sum x_1^2 \sum x_1 x_2 - \sum x_1 y_1 (\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_2^2 (\sum x_1^2)^2 - \sum x_1^2 (\sum x_1 x_2)^2} \quad (16)$$

$$b = \frac{\sum x_2 y_1 \sum x_1^2 - \sum x_1 y_1 \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \quad (17)$$

$$c = \frac{\sum x_1 y_2}{\sum x_1^2} - \frac{\sum x_2 y_2 \sum x_1^2 \sum x_1 x_2 - \sum x_1 y_2 (\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_2^2 (\sum x_1^2)^2 - \sum x_1^2 (\sum x_1 x_2)^2} \quad (18)$$

$$d = \frac{\sum x_2 y_2 \sum x_1^2 - \sum x_1 y_2 \sum x_1 x_2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2} \quad (19)$$

用改进公式对图 1 的油水相对渗透率曲线进行拟合, 见图 3,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  四个参数分别为 0.334, 3.777, 4.190, 1.291。油相相对渗透率曲线和水相相对渗透率曲线拟合的相关系数分别为 0.9991 和 0.9994, 油相相对渗透率曲线越弯曲,  $a$  和  $b$  相差越大,  $b$  值往往比  $a$  值大; 水相相对渗透率曲线越弯曲,  $c$  和  $d$  相差越大,  $c$  值往往比  $d$  值大。 $b$  值和  $d$  值主要影响相对渗透率曲线靠近束缚水端点半部分的形态,  $a$  值和  $c$  值主要影响相对渗透率曲线靠近残余油饱和度端点部分的形态。拟合结果与实际值产生的误差见图 4, 表 1 是用改进公式和 Willhite 公式对相对渗透率曲线拟合的结果。

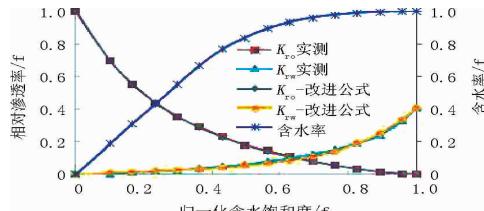


图 3 Willhite 改进公式拟合曲线

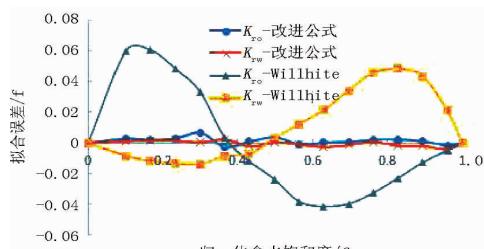


图 4 拟合误差曲线

表 1 油水相对渗透率计算值与实际值对比

含水饱和度	$K_{ro}$ 实测	$K_{rw}$ 实测	$K_{ro}$ 改进公式	$K_{rw}$ 改进公式	$K_{ro}$ Willhite 公式	$K_{rw}$ Willhite 公式
0.3118	1.0000	0	1.0000	0	1.0000	0
0.3500	0.6900	0.0090	0.6929	0.0103	0.7503	0.0007
0.3750	0.5500	0.0145	0.5521	0.0161	0.6106	0.0027
0.4000	0.4400	0.0200	0.4429	0.0217	0.4886	0.0069
0.4250	0.3500	0.0275	0.3567	0.0278	0.3831	0.0138
0.4500	0.2900	0.0325	0.2875	0.0348	0.2933	0.0241
0.4750	0.2300	0.0455	0.2309	0.0434	0.2180	0.0384
0.5000	0.1800	0.0540	0.1838	0.0542	0.1562	0.0573
0.5250	0.1450	0.0690	0.1441	0.0681	0.1068	0.0812
0.5500	0.1100	0.0891	0.1101	0.0864	0.0686	0.1107
0.5750	0.0800	0.1120	0.0808	0.1107	0.0404	0.1464
0.6000	0.0535	0.1430	0.0555	0.1436	0.0209	0.1888
0.6250	0.0315	0.1900	0.0338	0.1883	0.0087	0.2383
0.6500	0.0150	0.2520	0.0161	0.2500	0.0024	0.2955
0.6750	0.0050	0.3400	0.0034	0.3360	0.0002	0.3608
0.6903	0	0.4050	0	0.4050	0	0.4050

### 3 实例应用

大庆油田93条相对渗透率曲线之外的三条水驱相对渗透率曲线见表2,用改进经验公式拟合见图5。水相上凹型油水相对渗透率曲线回归参数 $a$ 、

$b$ 、 $c$ 、 $d$ 的值分别为1.338,3.086,3.762,1.094;水相直线型油水相对渗透率曲线回归参数 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 的值分别为1.3,2.8,1.5,0.86;水相下凹型油水相对渗透率曲线回归参数 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 的值分别为1.142,4.543,0.026,0.754,拟合相关系数都在0.99以上。

表2 三种类型油水相对渗透率曲线

水相上凹型			水相直线型			水相下凹型		
$S_w$	$K_{ro}$	$K_{rw}$	$S_w$	$K_{ro}$	$K_{rw}$	$S_w$	$K_{ro}$	$K_{rw}$
0.364	1.000	0.000	0.417	1.000	0.000	0.355	1.000	0.000
0.400	0.770	0.007	0.450	0.695	0.019	0.375	0.720	0.020
0.450	0.570	0.020	0.475	0.522	0.028	0.400	0.510	0.040
0.500	0.390	0.033	0.500	0.383	0.037	0.425	0.335	0.055
0.575	0.195	0.050	0.525	0.271	0.046	0.450	0.210	0.070
0.600	0.146	0.059	0.550	0.180	0.056	0.475	0.130	0.082
0.650	0.070	0.080	0.575	0.109	0.066	0.500	0.080	0.091
0.675	0.050	0.096	0.600	0.056	0.079	0.550	0.019	0.110
0.700	0.032	0.111	0.625	0.022	0.093	0.575	0.008	0.115
0.750	0.008	0.165	0.650	0.004	0.110	0.600	0.005	0.120
0.809	0	0.290	0.673	0	0.130	0.632	0	0.125

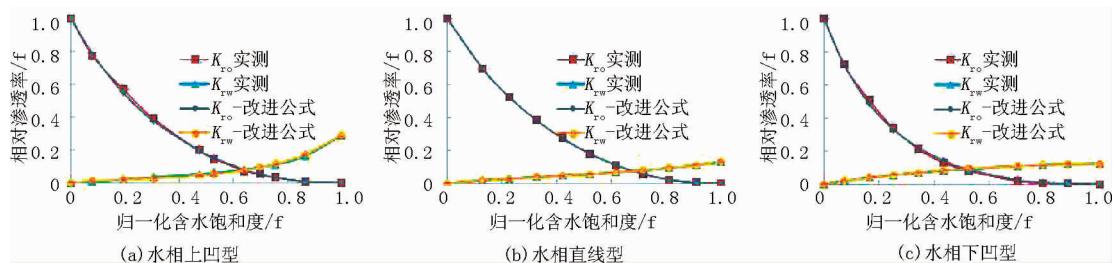


图5 三种类型油水相对渗透率曲线拟合曲线

### 4 结论

(1) 大庆油田油水相对渗透率曲线主要为水相上凹型,其次为水相直线型,最少的为水相下凹型。

(2) Willhite经验公式适合大多数油水相对渗透率曲线的拟合,但油水相对渗透率突变较大时,Willhite经验公式拟合的油水相对渗透率误差较大,油相指数和水相指数为常数对于曲线的拟合存在一定的局限性。

(3) 改进的Willhite经验公式弥补了传统Willhite经验公式的不足,公式改进后拟合精度更高,对于油水相对渗透率突变较大的情况也能拟合。

#### 参考文献:

- [1] 张继成,宋考平. 相对渗透率特征曲线及其应用[J]. 石油学报,2007,26(4):104-107.
- [2] 王曙光,赵国忠,余碧君. 大庆油田油水相对渗透率统计规律

及其应用[J]. 石油学报,2005,24(3):78-81,85.

- [3] 李克文. 根据动态驱替实验数据计算油水相对渗透率曲线的最优化方法[J]. 江汉石油学院学报,1989,10(3):45-54.
- [4] 陈元千. 相对渗透率曲线和毛管压力曲线的标准化方法[J]. 石油实验地质,1990,12(1):64-70.
- [5] 潘婷婷,张枫,邢昆明,等. 不同储层相对渗透率曲线归一化方法评价[J]. 大庆石油地质与开发,2016,35(03):78-82.
- [6] 高文君,姚江荣,公学成,等. 水驱油田油水相对渗透率曲线研究[J]. 新疆石油地质,2014,35(5):552-557.
- [7] 侯晓春,王雅茹,杨清彦. 一种新的非稳态油水相对渗透率曲线计算方法[J]. 大庆石油地质与开发,2008,27(4):54-56.
- [8] 李克文,罗蔓莉,王建新. JBN方法的改进及相应的计算与绘图软件[J]. 石油勘探与开发,1994,21(3):99-104,132.
- [9] 胡伟,杨胜来,翟羽佳,等. 油-水相对渗透率曲线优化校正新方法[J]. 石油学报,2015,36(7):871-875.
- [10] PURCELL W R. Capillary pressures - their measurement using mercury and the calculation of permeability therefrom[J]. Petroleum Transaction Amie,1949,186(2):39-48.

(编辑 谢葵)